МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНА НАУКОВА УСТАНОВА
«ІНСТИТУТ МОДЕРНІЗАЦІЇ ЗМІСТУ ОСВІТИ»

вул. Митрополита Василя Липківського, 36, м. Київ, 03035, тел./факс: (044) 248-25-14

На № ______________ від _________________

Ректорам (директорам) інститутів
післядипломної педагогічної освіти

Про проведення XXIII Всеукраїнського
турніру юних математиків
у 2023/2024 навчальному році

Шановні колеги!

Повідомляємо, що з дотриманням законодавства України щодо забезпечення заходів безпеки, пов'язаних із запровадженням правового режиму воєнного стану в Україні, у 2023/2024 навчальному році планується проведення XXIII Всеукраїнського турніру юних математиків. Турнір буде проведено відповідно до вимог Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності, затвердженого наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 р. № 1099 (із змінами), зареєстрованого в Міністерстві юстиції України 17 листопада 2011 за № 1318/20056.

Фінальний етап XXIII Всеукраїнського турніру юних математиків планується провести у жовтні 2023 року на базі Київської школи економіки.

Отримати інформацію щодо участі у фінальному етапі Всеукраїнського турніру юних математиків можна у відділі роботи з обдарованою молоддю Державної наукової установи «Інститут модернізації змісту освіти», тел. (044) 248 18 13 або за тел. 067-215-15-71, Панасенко Олексій Борисович.

Завдання, що пропонуються для XXIII турніру (додаток), розміщено на сайті Інституту (https://imzo.gov.ua/) та на сайті Всеукраїнського турніру юних математиків (tym.in.ua) .

З повагою
директор Євген БАЖЕНКОВ

Б. Г. Кремінський,
248 18 13

ДНУ "Інститут модернізації змісту освіти"
21/08-1053 від 20.06.2023
БАЖЕНКОВ ЄВГЕН ВОЛОДИМИРОВИЧ 20.06.2023 13:09
248197DDFAB977E5040000006ABE00014E1E2604

Додаток до листа ДНУ
«Інститут модернізації змісту освіти»
від

XXIII ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

Завдання для відбіркових етапів турніру[1]

Дорогі друзі — юні шанувальники математики!

Пропонуємо вам для розв'язання комплект завдань турніру. Деякі із задач, що наведені нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної стратегії, оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів). Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. «Спритні модулі»

Функція f, натуральне число k та числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ є такими, що f лінійна на кожному із проміжків $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_k, +\infty)$. Доведіть, що f можна єдиним чином зобразити у вигляді

$$f(x) = a_1|x-x_1| + a_2|x-x_2| + \ldots + a_k|x-x_k| + a_{k+1}x + a_{k+2},\ \ x \in R$$

де a_1, …, a_{k+2} – деякі дійсні числа.

2. «Рівняння в раціональних числах»

а) Доведіть, що існує безліч пар (x, y) додатних раціональних чисел, що задовольняють рівняння $x^y = (2y)^x$;

[1] За цими задачами будуть проведені чвертьфінальні та півфінальні бої фінального етапу XXIII Всеукраїнського турніру юних математиків. Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

б) знайдіть усі такі пари.

3. «Від ТЮМу-23 до ТЮМу-24»

Знайдіть усі пари натуральних чисел x та y таких, що $23+x^2=24y^2$.

4. «Ланцюжок коренів»

Для всіх натуральних n доведіть нерівність

$$\sqrt{1^3+\sqrt{2^3+\ldots+\sqrt{n^3}}}<3.$$

5. *«*Діофантові рівняння і подільність*»*.

а) Нехай a та b – натуральні числа такі, що

$$a>b,\ \ a^b+b^a=\left(4n-1\right)^{2n-1}.$$

Доведіть, що a ділиться націло на $\left(2n-1\right)^2$ при кожному натуральному n.

б) Нехай a та b – натуральні числа такі, що

$$a>b,\ \ a^b+b^a=\left(2L_{3n}-1\right)^{F_{3n-1}+F_{3n+1}-1}.$$

Доведіть, що число $\dfrac{a}{\left(\sum\limits_{k=0}^{3n-2}L_k\right)^2}$ також натуральне при кожному натуральному n. (*Числа Фібоначчі* F_n *та Люка* L_n *визначаються відповідно формулами:* $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+1}=F_{n-1}+F_n$ ($n\ge 1$) та $L_0=2$, $L_1=1$, $L_{n+1}=L_{n-1}+L_n$ ($n\ge 1$).

6. «Нерівність зі степенями»

Для дійсних чисел $a<b$ доведіть нерівність

$$\left(2^b-2^a\right)\left(3^b-3^a\right)<\frac{b-a}{2}\left(6^b-6^a\right).$$

7. «Розрізання трапеції»

Розріжте рівнобічну трапецію на три подібні між собою трапеції всіма можливими способами. Для рівнобічної трапеції з основами a та b і бічною стороною $c=1$ з’ясуйте необхідні та достатні умови реалізації кожного способу розрізання.

8. *«*Відкладаємо рівні відрізки»

У трикутнику ABC кут C дорівнює $20°$. Відкладемо на стороні AC відрізок $MC = AB$, а на стороні BC – відрізок $CK = AM$. Знайдіть величину кута MKC, якщо кут BAC дорівнює:

а) $20°$; б) $40°$; в) $60°$; г) $80°$.

9. «Циклічна четвірка точок»

У трикутнику ABC точка I — інцентр, точка I_a — центр зовнівписаного кола, що дотикається сторони BC. З вершини A всередині кута BAC провели промені AX та AY. Промінь AX перетинає прямі BI, CI, BI_a, CI_a в точках X_1, …, X_4 відповідно, а промінь AY перетинає ці ж прямі в точках $Y_1, \ldots, Y_4$ відповідно. Виявилося, що точки X_1, X_2, Y_1, Y_2 лежать на одному колі. Доведіть рівність

$$\frac{X_1X_2}{X_3X_4} = \frac{Y_1Y_2}{Y_3Y_4}.$$

10. «Два кола»

У гострокутному трикутнику ABC провели *чевіану* AP та відмітили центр O описаного кола. Описане коло трикутника ABP вдруге перетинає пряму AC в точці X, описане коло трикутника ACP вдруге перетинає пряму AB в точці Y. Доведіть, що прямі XY та PO перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли P – основа бісектриси трикутника ABC.

11. «Три квадрати»

На стороні *CD* квадрата *ABCD* обрано точку *F* та побудовано два рівні квадрати *DGFE* та *AKEH* (точки *E* і *H* лежать всередині квадрата). Нехай *M* – це середина *DF*, *J* – інцентр трикутника *CFH*. Доведіть, що:

а) точки *D, K, H, J, F* лежать на одному колі;

б) кола, вписані в трикутники *CFH* та *GMF*, мають однакові радіуси.

12. «Рівняння з раціональними коренями»

а) Доведіть, що для всіх додатних раціональних чисел $r \neq 1$ існує єдина пара взаємно простих натуральних чисел a та b таких, що число r є коренем рівняння $x^4 = \dfrac{ax-b}{bx-a}$.

б). Доведіть, що існує нескінченна кількість пар взаємно простих натуральних чисел a та b таких, що усі три дійсні корені рівняння $x^4 = \dfrac{ax-b}{bx-a}$ є трьома різними раціональними числами.

13. «Ощадливі перестановки»

Чудний чоботар Чеслав зшив 30 різних пар взуття, перемішав усі 60 чоботів між собою та розставив випадковим чином у ряд. Його педантична подруга Павлина переставляє взуття: за один раз Павлина може взяти будь-які два чоботи та обміняти їх місцями. За яку мінімальну кількість таких обмінів Павлина зможе гарантовано досягти розташування, в якому кожна пара чоботів розташована поруч, причому ліворуч стоїть лівий чобіт пари, а праворуч — правий?

14. «Сума дробів»

Раціональне число r=0,1415926…, складене із першої тисячі знаків десяткового розкладу числа $\pi - 3$. Почнемо виписувати число $s = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$ за таким правилом: на кожному кроці для натурального n до суми додається дріб $\frac{1}{n}$, найбільший із можливих, але так, щоб сума не виявилася більшою за число r. Таким чином, враховуючи, що $\frac{1}{7} = 0{,}142\ldots > r$, пишемо $s = \frac{1}{8} + \ldots$; далі, оскільки $\frac{1}{8} + \frac{1}{60} = 0{,}14166\ldots > r$, пишемо $s = \frac{1}{8} + \frac{1}{61} + \ldots$ тощо. Доведіть, що цей процес обірветься, тобто на деякому кроці виявиться, що записано точнісінько число r.

15. «Сума цифр кратного»

а) Відомо, що натуральне число N менше за 10^6. Шукаємо таке натуральне M що воно ділиться на N, а *сума цифр* числа M не перевищує числа k Для якого найменшого k можна стверджувати, що таке число M в усіх випадках існує?

б) Та сама задача, але відомо, що $N < 999999$.

16. «З'єднуємо точки»

На площині розміщено мільйон точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Дев'ять гравців по черзі сполучають ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один хід дозволяється сполучити довільні дві точки, які ще не були з'єднані. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами в заданих точках, *усі сторони якого мають однаковий колір*. Чи може така гра закінчитися внічию?

17. «Дописуємо трійки»

Марійка та Миколка грають у таку гру. Спочатку Миколка називає деяке *просте* число p. Після цього Марійка записує на дошці натуральне число n Тоді Миколка дописує до цього числа справа одну чи декілька цифр 3. Він виграє, якщо отримане таким чином число ділиться на p. В іншому разі – перемагає Марійка. Хто з них виграє, якщо обоє прагнуть перемогти?

18. «Чудовий квадрат»

У клітинки квадрата 5×5 Петрик і Ганнуся по черзі (першим ходить Петрик) вписують цифри від 1 до 9. Квадрат називається *чудовим*, якщо після заповнення всіх клітинок суми усіх дев'яти чисел у кожному меншому квадраті 3×3:

а) належать діапазону [37; 53];

б) належать діапазону [38; 52].

Петрик любить чудеса і хоче зробити квадрат *чудовим*. Чи вдасться Ганнусі йому завадити?

19. «Блукання по дільниках»

Двоє гравців та суддя грають у таку гру. Суддя випадковим чином вибирає один із натуральних дільників деякого фіксованого числа n та називає його, а далі гравці по черзі *множать* останній названий дільник на 2, або *множать* його на 5, або ж *ділять* його на 10 – так, щоб отриманий результат був знову натуральним дільником числа n, який ніхто ще не назвав. Гравець, який не може зробити хід, програє. Яка ймовірність того, що за правильної гри обох гравців виграє перший гравець, якщо: а) $n=10^6$, б) $n=10^{2k}$, $k\in N$.

***

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:

Е. Г. Ейлазян, О. В. Зеленський, Е. Зуппа (Італія), А. І. Казмерчук, Д. Коуклі (Канада), О. Г. Кукуш, М. П. Мороз, Д. П. Мисак, О. Б. Панасенко, В. М. Радченко, О. К. Толпиго, Е. Й. Туркевич, Р. П. Ушаков, І. В. Федак, А. М. Фролкін, Д. І. Хілько (Франція), Г. М. Шевченко, А. С. Юрчишин.